Кр. Коши: $\overset{\text{н.с.}}{\Longleftrightarrow}$ ч.и.д. $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon): \forall n>N\ \forall p\in\mathbb{N}\ |S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$. — $a_n>0$

Пр. ср. I и II — II: $a_n=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)$ $p>1$ сх., $p\leq 1$ расх. — начиная с некот. номера

Пр. Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, $q<1$ сх., $q>1$ расх.

Пр. Коши $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, $q<1$ сх., $q>1$ расх.

Пр. Раабе $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p$ $p>1$ сх., $p<1$ расх.

$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=p$ $p>1$ сх. $p<1$ расх.

Пр. Гаусса $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon>0$, $|\theta_n|<C$ $\Rightarrow$ $\lambda>1$ сх. $\lambda<1$ расх. $\lambda=1$ $\mu>1$ сх. $\mu\leq1$ расх.

Инт. призн. Коши $f(x)$ - невозр. ф. $\geq 0$ сх. $\sim\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$ $\left(\lim\limits_{A\to\infty}(\ \ )\Big|_1^A\right)$

---

Пр. Лейбница $(-1)^n a_n$ - сх. а) $\searrow$ невозрастае б) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $R_n=(-1)^n\theta_n b_{n+1}$ $(0\leq\theta\leq1)$ $a_n\geq0$

Пр. Д. $\exists C: |\sum\limits_{k=1}^n u_k|\leq C\ \forall n$ $V_n$ мон. $\to 0$ $\Rightarrow$ сх.

Пр. Аб. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ - сх. $\{V_n\}$ монот. и огран. $\Rightarrow$ сх.

---

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сх. — действие с рядами

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$, если один из них сх. абс.

$c_n=\sum\limits_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}$, если $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$, то $c_k=\sum\limits_{i=0}^{k}a_i b_{k-i}$

---

$\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^n p_i=\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P$ расх.: 1) 0 2) $\infty$ 3) $\nexists$ — бескон. произв-е

Утв. Сх. $\prod p_i \Leftrightarrow$ сх. $\sum\limits_{n=n_0}\ln p_n$

Утв. Необх. усл. сх.: $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=1$

Утв. Если $p_n=1+\alpha_n$, $\alpha_n$ - не меняет знака, то сх. $\prod p_i \Leftrightarrow$ сх. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(p_n-1)$

Утв. — " — меняет знак, то $\sum\alpha_n^2<\infty$ $\Leftrightarrow$ (если $\sum\alpha_n<\infty$) усл. произв. сх.

Утв. Н. и Д. абс. сх. $\Leftrightarrow$ абс. сх. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$

Опр. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ р. сх. на $X$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ а) $\exists f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ $(x\in X)$ б) $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon): |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon\ \forall n>N\ \forall x\in X$. — Фун-ые посл.

$\{f_n(x)\}\overset{(a,b)}{\rightrightarrows}f(x)$

Опр. Ф.р. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ р. сх. на $X$, если равн. сх. его част. суммы.

Кр. Коши аналогично.

Пр. Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ сх. абс. и равн. на $X$, если $|u_n(x)|\leq c_n$ при $x\in X$.

$\Downarrow$

Пр. Дирихле
Пр. Абеля
Аналогично, только $\underset{сх}{\text{рав.}}$ ; $\forall x$ ; $\underset{огр. вод.}{\forall n}$ мон.

Утв Сумма р. сх. равном. непр. ф. есть ф. непрер.

Утв Если ф. р. сх. р. на $\forall [\alpha,\beta] \subset (a,b)$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = A_n$ $(n=1,\dots)$, то
ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ сх.
$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$$

Утв Членые $\overset{(\text{хотя бы в одн. т.})}{\text{сх.}}$ ф. р. непр. диф. при $a<x<b$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сх. равн. на $(a,b)$, то
$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \quad x\in(a,b).$$

Утв Члены $\underset{\text{на } [a,b]}{\text{сх. равн.}}$ р. непрер. на $[a,b]$, то
$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$$

Утв $\int_a^b R_n(x)dx \to \infty$ при $n\to 0$, где $R_n(x) = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$, то .

Крит. $f_n(x) \overset{[a,b]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{a\le x\le b} \gamma_n(x) = 0$, $\gamma_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$.

Схема исп. на равн. сх.: $\sum f_n(x)$
1) $D(f)$
2) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $\nexists \Rightarrow$ нет
3) $r_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$
4) $r_n'(x)$, т. экстр., $x_k$ - т. в кот. $r_n(x_k) = \max\limits_{a\le x\le b} r_n(x)$
5) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x_k) = \begin{cases} 0 - \text{рав. сх.} \\ \ne 0, \nexists, \infty - \text{нет рав. сх.}\end{cases}$

Пример $f_n(\frac{1}{n})$ —

---

Степен. ряды

Опр $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}}$, или $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, если $\exists$.

Необ. и д. усл. разл. в ряд Ост. член в ф. Тейлора (любой) $\underset{n\to\infty}{\to} 0$ и $f(x)\in C^{\infty}$

Т. Абеля $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x|<R)$ сх. в т. $x=R$, то $S(R) = \lim\limits_{x\to R-0} S(x)$.

Пример $(x-x_0)$ —

Утв Внутри общего интервала сход.:
$\pm$ $\cdot$ как с обычн. рядами и $(\ )'$ $\int$ как с функ.

---

Методы сумм. рядов

Т. Абеля $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сх., то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Опр $\sigma_n = \dfrac{S_1 + \dots + S_n}{n}$, $\sigma_n \to A(C)$
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k < \infty$, $\exists f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = A \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = A(A)$

I. Если расх. ряд сум. к $A(C)$, то к $A(A)$ также.

II Таубера Ряд сумм. к $A(A) \overset{?}{\Rightarrow} \sum a_k < \infty$
1) $\sum a_k = A(A)$
2) $a_k \ge 0$
2') $a_k = o(\frac{1}{k})$
2'') $a_k = O(\frac{1}{k})$.

многие
в каж. много

**Сх. функ. посл. в т. и на мн-ве.** Пусть оо функ.-посл. опр-е $\{x\}$ мн-ва $E^m$, функц. посл. $\{x\}$ мн-ва $\{x\}$ если сх., мн-во всех $x_0$ в кот. сх. — область сходимости. Совокупность пред. значений для всех $x \in \{x\}$ — мн-во зн. $f(x)$ — пред. ф.

**Равн. сх. на мн-ве**

Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сх. на $\{x\}$ к $f(x)$; сх. равн. на $\{x\}$ к $f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon):\ \forall n \geq N\ \forall x \in \{x\}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Фун. ряд равн. сх. на $\{x\}$ к $S(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \{S_n(x)\}$ част. сумм сх. равн. к пред. функ-и $S(x)$.

**Кр. Коши равн. сх.** $\{f_n(x)\} \overset{\{x\}}{\rightrightarrows} \{f(x)\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N}\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon\ \forall x \in X$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{\{x\}}{\rightrightarrows} S(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon.\ \forall x \in X.$

**Признак Вейерштр.** — Фун. ряд сх. равном. на $X$, если его можно мажор. на $X$ сх. числовым рядом. ($|u_k| \leq c_k$)

**Пр. Дини** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на $X$,
1) ряд сх. на $X$ пот. к $S(x)$
2) $S(x)$ непр. на $X$
3) $u_n(x)$ — непр. на $X$ и $\geq 0$
4) $X$ — компакт

$\Rightarrow$ ряд сх. равн. на $X$.

**Опр** $\{f_n(x)\}$ — равн. огр., если $\forall x \in \{x\},\ \forall n \in \mathbb{N}\ |f_n(x)| \leq M$

**Опр** $\{v_n(x)\}$ наз. с равн. огр. измен., если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k|$ сх. равн. на $X$

**Пр. Аб. 1** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$: $S_n(x)$ р. огр. на $X$, $\{v_n\}$ равн. огр. изм. и $v_n(x) \to 0 \Rightarrow \sum u_n v_n$ сх. равн. на $X$.

**Пр. Аб. 2** $\{S_n(x)\} \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, $|S(x)| \leq C_1\ \forall x \in X$, $\{v_n\}$ равн. огр. изм. и $v_n \to v(x) \leq C_2\ \forall x \in X$

**Т-о почл. перех. к пред.** $S_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$ и $\forall k \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{x \to x_0} u_k(x) = b_k$ ($x_0$ — пред. т.) $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{x \to x_0} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ $\Rightarrow$ сх. равн. на $X$.

**Т. о почл. интегр.** $\{f_n(x)\} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x) \in R[a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow f(x) \in R[a,b]$ $\exists \lim \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

**Т. о почл. диф.** $f_n(x)$ — диф. на $[a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{f'_n(x)\} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$, $\exists x_0 \in [a,b]$: $\{f_n(x_0)\}$ сх. $\Rightarrow$
$\sum f_n$ сх. хотя бы в одн. т. $[a,b]$
$f_n$ — диф. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum f'_n$ сх. равн. на $[a,b]$ $\Rightarrow \{f_n(x)\} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, причём
$\Rightarrow \sum f_n$ сх. р. на $[a,b]$ к $S(x)$, $S(x)$ — диф. на $[a,b]$ и $S'(x) = \sum f'_n(x)$; $f'(x) = \lim f'_n(x)\ \forall x \in [a,b]$.

**Сх. в среднем**

**Т. о почл. инт.** Пусть $f_n(x), f(x) \in R[a,b]$, $\{f_n(x)\}$ сх. в средн. к $f(x)$ на $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

$\{f_n(x)\}$ сх. в среднем к $f(x)$ на $[a,b]$, если $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2\,dx = 0$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх. в ср. к $S(x)$ на $[a,b]$, если $\{S_n(x)\}$ сх. в ср. на $S(x)$ на $[a,b]$

Преобразование Абеля: ($n\geq 0$, $S_0=0$) Пусть $n, p$ — произв. номера и $\{u_n\}, \{v_n\}$ — пр. посл.

$S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1}) + S_{n+p}v_{n+p} - S_n v_{n+1}$

$u_k = S_k - S_{k-1} \Rightarrow$ | преоб. | $\Rightarrow$ ч.т.д.

I пр. Аб: $S_n=\sum_{i=1}^{n} u_i \leq C$ $\forall n$, $\{v_k\}$ — пол. с огр. из. и $v_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ сх.

$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k - v_{k+1}|$ сх.

II пр. Аб: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сх., $\{v_k\}$ — пол. огр. из. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ сх.

Д-А! огр. посл. сум. $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ невозр. посл. $\to 0$ $\Rightarrow$ сх. $\sum u_k v_k$

Пр. Лейб. знак. ряд, $\{|a_n|\}$ невозр. $\to 0$ $\Rightarrow$ сх.

Т. о пр-и рядов $\sum u_k$, $\sum v_k$ сх. абс. к $U, V$ $\Rightarrow$ ряд, сост. из $u_k v_l$ $k=1,2,\ldots$ $l=1,2,\ldots$ и запис. в любом порядке сх. абс. к $UV$.

Т. Мертенса $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \to UV \Leftarrow$ один из ряд. сх. абс., а др. сх.

$a_k = u_1 v_k + \ldots + u_k v_1$

Нис-д сх. произв. I $\prod p_i$ сх. $\Leftrightarrow \sum \ln p_i$ сх., если сх. $\Rightarrow P = e^S$, $p_i > 0$

II $p_i = 1+u_i$, $u_i > -1$, $u_k$ начиная с $k_0$ сохран. знак $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k \Leftrightarrow \prod p_i$ сх.

Сум. по Чезаро $\lim_{n\to\infty} \frac{S_1+\ldots+S_n}{n}$

$S_n$ сх. к пред. $\left\{\frac{S_1+\ldots+S_k}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

Сум. по Абелю $\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1}$ сх. $\forall x \in (0,1)$ и $\exists \lim_{x\to 1-0} S(x) \Rightarrow$ сум. $= S$

1) $|u_k| \leq M$

$|u_k x^{k-1}| \leq M|x^{k-1}|$ $\Sigma$ сх. $\forall |x|<1$.

2) Из пре. Абеля: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1}$

$S = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} S x^{k-1}$

$\Rightarrow S - S(x) = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k x^{k-1}$ | $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ : $1-\delta<x<1$ | $1-x<\varepsilon$, $\delta_k \to 0 \Rightarrow k > K$, $|\delta_k| < \frac{\varepsilon}{2}$

ост. в силу огр. $< \frac{\varepsilon}{2}$.

Т. о св. между сх. повт. и дв. ~~ряда~~ Если $\sum_{k,l} a_{kl}$ сх. и $\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$ ($k=1,2,\ldots$) сх. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\right)$ сх. к сумме дв. ряда.

Т. о 4 рядах: два повт., двойн., $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ — произв. нум. матр., $a_{kl} \geq 0$ или один из них сх. ~~при данном положении сх. абс. ряд.~~ $\Rightarrow$ все ост. сх. к той же сумме.

Равн. непр. $f_n(x)$ опр. на $\{x\}$ + $\{f_n(x)\}$ - равност. непр. на $\{x\}$ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall n\in N,\ \forall x', x'': \rho(x',x'')<\delta\ |f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon$.
в себе множество

Т. Арцела. $\{f_n(x)\}$ равн. непр. и равн. огр. на $[a,b]$ $\Rightarrow \exists \{f_{n_k}(x)\} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$

Т. Коши-Адам. I Если $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ - не огр. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n + a_0$ сх. лишь в т. $x=0$.

II $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 0$, $\sum\limits_{n=0} a_n x^n$ сх. абс. $|x|<1/L$, и расх. для $|x|>1/L$.
$\{\sqrt[n]{a_n}\}$-огр.

III $L=0 \Rightarrow$ сх. абс. $\forall x\in\mathbb{R}$.

—||—

Т. почл. инт. ст. р.) $R>0$ - рад. сх. ст. ряда, $|x|<R$, $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно почленно интегр. на $[0,x]$, получен. ряд имеет тот же радиус сх.

Т. почл. диф. (ст. р.) Ряд ст. можно внутри его промеж. сх. ~~диф.~~ почленно. Ряд, получ. диф., имеет тот же радиус сход.

Разложения э. ф. в ст. р. $\underbrace{e^x = 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ \cos x = 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ \sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\forall x\in\mathbb{R}}$, $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ $\forall x\in(-1,1]$.

Опр. пред. инт. сумм. для прямоуг. $\sigma=\sigma(f,T) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{p} f(\xi_k,\eta_l)\Delta R_{kl}$ - инт. сумма;

$I$ - пределом инт. сумм $\sigma(f,T)$ при $\Delta\to 0$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \Delta<\delta$ нез. от выб. $(\xi_k,\eta_l)$ на $R_{kl}$ $|\sigma-I|<\varepsilon$.

Крит. инт. огр. на прям. ф. $f(x,y)$ - огр. на $R$ инт. на $R$ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0\ \exists T$ прям. $R$: $S-s<\varepsilon$.

Общее опр. дв. инт. $f(x,y)$ инт. в $D$, если $\exists I$ при $\Delta\to 0$ предел инт. сумм $\sigma$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \Delta<\delta$ нез. от выб. $P_i\in D_i$ $|\sigma-I|<\varepsilon$.

Осн-е св-ва дв. инт-а 1) Аддит. $f(x,y)$ инт. в $D$ и при помощи $\Gamma$, $|\Gamma|=0$ разб. на две связн. $D_1, D_2$ не имеющих общих внутр. т. $\Rightarrow$ $f(x,y)$ инт. на $D_1, D_2$ $\iint\limits_D f\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f\,dxdy$

4) Лин. $f(x,y)$ инт. в $D$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow \alpha f+\beta g$ инт. в $D$ и $\iint\limits_D(\alpha f+\beta g)dxdy = \sim$
$g(x,y)$

2) $f(x,y), g(x,y)$ инт. в $D$ $\Rightarrow f\cdot g$ инт. в $D$

3) $f(x,y) \geq g(x,y)$ инт. в $D$ $f\geq g \Rightarrow \iint f \geq \iint g$

5) $f(x,y)$ инт. в $D$ $\Rightarrow |f(x,y)|$ инт. в $D$, $\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$.

6) $f(x,y)$ инт. в $D$,
$g(x,y)$ огр. и совп. с $f$ на $D$,
за иск. мн-ва ~~меры 0~~ т. площади 0
$\Rightarrow$ $g(x,y)$ инт. в $D$.

7) $f, g$ инт. в $D$, $g \geq 0$ $(\leq 0)$, $m = \inf_D f$, $M = \sup_D f$ $\Rightarrow$ $\exists \mu \in [m, M]$: $\iint_D fg\,dxdy = \mu \iint_D g\,dxdy$.

8) $\iint_D dxdy = |D|$.

<u>Свед. дв. к повт. инт.</u> $D$: $\forall$ пр. $\parallel Oy$ $\cap$ $\Gamma$ либо по отр. $[y_1(x), y_2(x)]$, либо не более чем в 2 т. с ординатами $y_1(x) \leq y_2(x)$, $f(x,y)$ инт. в $D$ и $\forall x \in [x_1, x_2]$ (проекция $D$ на ось $Ox$) $\exists \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$

$\Rightarrow \exists \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f\,dy$ и $\iint_D f\,dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f\,dy$.

<u>Ф-ла зам. перем.</u> $y = (y_1 \ldots y_n)$, $x = (x_1 \ldots x_n)$, $y = \varphi(x)$, $f$ инт. в $D$ - компакт, $D = \varphi(D')$ и $\exists \varphi^{-1}: D' = \varphi^{-1}(D)$

$\varphi: D' \to D$ и биективно
$\varphi_i \in C^1[D']$ по всем перем.
$\frac{D(y)}{D(x)} = \frac{D(y_1 \ldots y_n)}{D(x_1 \ldots x_n)} \neq 0$
$f(y)$ - инт. в $D$

$\Rightarrow \int \ldots \int_D f\,dy_1 \ldots dy_n = \int \ldots \int_{D'} f(\varphi_1 \ldots \varphi_n) \cdot |J| \cdot dx_1 \ldots dx_n$

$n = 2$.

<u>Призн. сх. несобств. инт.</u> $f(x) \geq 0$: $\int_D f(x)dx$ сх. $\Leftrightarrow$ $\exists \{D_n\}$ монот. исч. $D$, $a_n = \int_{D_n} f(x)dx$ ~~огр.~~ $\{a_n\}$ огр.

общий пр. ср.: $f, g$: $0 \leq f \leq g$ на $D$ $\Rightarrow$ $\int_D g\,dx$ сх. $\Rightarrow$ $\int_D f\,dx$ сх. и наоборот.

<u>Т. об эквив. сх. и абс. сх. несоб. инт.</u> Для $n \geq 2$ несоб-й м-ый инт. сх. $\Leftrightarrow$ сх. абс.

<u>Опр. кр. инт. 1$^{го}$ р. от $f$ по кр.</u> $\exists I$ - пред. инт. сумм $\sigma_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k$ при $\Delta \to 0$ $\Rightarrow$ $I = \int_L f(x,y)dl$ - кр. инт. 1 рода по $L$.

<u>Опр. кр. инт. 2$^{го}$ р. от $P$ и $Q$</u>
$\sigma_2(P) = \sum_{k=1}^n P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))\Delta x_k$
$\sigma_3(Q) = \sum_{k=1}^n Q(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))\Delta y_k$

$\int_L P(x,y)dx$ = предел $\sigma_2(P)$ $\Delta \to 0$
$\int_L Q(x,y)dy$ = предел $\sigma_3(Q)$, $\Delta \to 0$

<u>Ус-ие $\exists$ кр. инт. 1, 2 рода</u> $L$-гл.: $\varphi, \psi$ непр. на $[a,b]$, $L$-без о.т.: $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$ в $[a,b]$, $f, P, Q$ - непр. вдоль $L$ $\Rightarrow$ $\exists$ крив. инт. и $\int_L f\,dl = \int_a^b f(\varphi, \psi)\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\,dt$

$\int_L P\,dx = \int_a^b P(\varphi, \psi)\varphi' dt$, $\int_L Q\,dy = \int_a^b Q(\varphi, \psi)\psi'(t)dt$

<u>Пол. пов. и ур-е кас. $\Sigma$</u>: $rg\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2$ в $D$ и все 2-ые 1$^{го}$ пр. непрер. $\Leftrightarrow$ отоб. обр. задает гл. пов. $\Pi$ без особ. т.

Эл-ая пов-ть $f(G) \subset \mathbb{R}^3$, $f$-гомеоморфизм $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (биект. $f, f^{-1}$ непр.), $G$-откр. круг в $\mathbb{R}^2$

Прост. пов: $\Phi \subset \mathbb{R}^3$: $\Phi$-связно, $\forall M \in \Phi$ $\exists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(M) \cap \Phi$ - элем. пов.

Ф-ли нап-х косинусов ед. нор. вект.: $\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $[\bar r_u, \bar r_v] = (A, B, C)$.

Ф-ла пл. пов.: $\sigma = \iint\limits_G |[\frac{\partial \bar r}{\partial u}, \frac{\partial \bar r}{\partial v}]| du dv$

Ф-ла свед. пов. инт. 1-го рода к обычному дв.: $\iint\limits_S f(M)\, d\sigma = \iint\limits_\Omega f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\, |[\bar r_u, \bar r_v]|\, du dv$

Инв. Опр. л.о.: $\operatorname{div} A = \sum\limits_i (e_i, A e^i)$; $e_i, e^i$ – пара взаимного базисов.

$\operatorname{rot} A = \sum\limits_i [e_i, A e^i]$.

Дифф. ск. пол. в Т.: $u(M)$ – диф. в т. $M_0$, если $\exists \bar g \in \mathbb{R}^3$: $\Delta u(M_0) = (\bar g, \Delta \bar r) + \bar o(|\Delta \bar r|)$,
$\bar g$ зависит только от $M_0$.
$\bar o(|\Delta \bar r|)$ – ск. ф. $\alpha(\Delta \bar r)$: $\lim\limits_{\Delta \bar r \to 0} \frac{\alpha(\Delta \bar r)}{\Delta \bar r} = 0$.

Диф. в.п. в т. $M_0$: $f(M)$ дифф. в т. $M_0$, если $\exists$ л.о. $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: $\Delta f(M_0) = A\Delta \bar r + \bar o(|\Delta \bar r|)$
$f(M) - f(M_0)$ — не зависит от $\Delta \bar r$, только от $M_0$.
$\bar o(|\Delta \bar r|)$ – в. ф. $\alpha(M, M_0)$: $\lim\limits_{|\Delta \bar r| \to 0} \frac{|\alpha(M, M_0)|}{|\Delta \bar r|} = 0$

$\operatorname{rot}\operatorname{rot} A = \operatorname{grad}(\operatorname{div} A) - \Delta A$

$\operatorname{rot} A = [\nabla, A]$
$\operatorname{div} A = (A, \nabla)$
$[\nabla, [\nabla, A]] = \nabla(\nabla, A) - \Delta A$

Ф Грина: $\oint\limits_{L = \partial D} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx dy$ | $\Pi : E$; $\partial D : E$; $L$ – кус.-гл. спр. кривая на $\Pi$ Элеск.; усл. $SLT$; $D$-одн.-е, произв. и непр.-непр. в $D \cup L$.

Ф. Остроград.: $\iint\limits_{\partial G} (\bar a, \bar n)\, d\sigma = \iiint\limits_G \operatorname{div} \bar a\, dx dy dz$ | $\bar a = (P, Q, R) \in C^1(\bar G)$, $G$ – область в $\mathbb{R}^3$
$G$ – односв., замкн., $\partial G$ – кус.-гладкая, полная без особ.т.;
поток вект. through
$G$ – не тела; обл. ест. коор.-и свя. $\partial G$ перес. и ох. $SLT$.

Ф Стокса: $\oint\limits_C (\bar a, \bar t)\, dl = \iint\limits_S (\operatorname{rot} \bar a, \bar n)\, d\sigma$
$C$ – циркул. $\bar a$ вдоль $C$
$S$ – полн., огр., гладк., кус.-гл., одност.
дифф-мо непрер. пр.-е по $V$ непр. в нек. окр. пов-ти $S$

можно разбить на конечное число частей, каждая из кот. одн. проек. на все коорд. плоскости. нен. глад. вид. для этой части ПЭСК.

$V = \frac{1}{3} \iint\limits_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$

Нез. Д. интеграла пот. вект. поля: $P(x,y), Q(x,y)$ опр. в $D \subset \mathbb{R}^2$ и непр. в $D$ $\Rightarrow$ $\oint\limits_{L \subset D} P dx + Q dy = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{AB} P dx + Q dy$ не зав. от. кривой дуги.
$\Leftrightarrow \exists u = u(x,y)$, $du = P dx + Q dy$
$\int\limits_{AB} P dx + Q dy = u(B) - u(A)$

Всё.